

Rappresentazione del segnale elettrico **trifase**



Gli **analizzatori** di potenza e di energia **Qualistar+** consentono di visualizzare istantaneamente le caratteristiche di una rete elettrica trifase.

I Qualistar+ visualizzano simultaneamente i segnali di tutti gli ingressi. Le misure sono presentate come valori, forme d'onda, rappresentazione spettrale oppure come rappresentazione vettoriale (detta anche di Fresnel).

**Rappresentazione
temporale**

**Rappresentazione
spettrale**

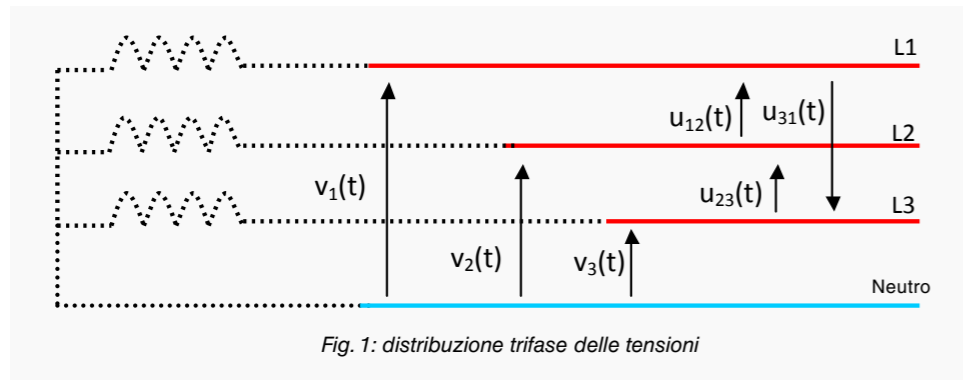
**Rappresentazione
vettoriale**

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

1. Tensioni trifase

Il trasporto dell'energia elettrica dal punto di produzione (sorgente) a quello di distribuzione (carico) avviene mediante tre conduttori. La corrente alternata trifase è utilizzata soprattutto per alimentare gli impianti industriali. Un circuito trifase riceve tre tensioni sinusoidali della medesima frequenza.

La distribuzione di tensioni trifase (fig. 1) è composta di 3 conduttori di linea e (a volte) di un conduttore detto "di neutro". Le misurazioni delle tensioni si effettuano quindi come segue:



A. Equazioni e proprietà associate

Il sistema trifase di tensioni rappresentato da $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v_3(t)$ è definito dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) \\ v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

In teoria:

- l'ampiezza delle 3 tensioni è uguale,
- i rispettivi sfasamenti sono uguali (120°)
- le tensioni sono perfettamente sinusoidali.

Nel caso pratico però la teoria non viene mai riscontrata. L'entità degli scostamenti può essere quantificata attraverso misure del **coefficiente di squilibrio e del coefficiente di distorsione armonica**.

Le tensioni $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v_3(t)$ sono dette "tensioni di fase" o "tensioni fase-neutro". Le tensioni rilevate tra fasi si dicono "tensioni concatenate". Nel caso in cui i sistemi trifase di tensioni concatenate siano perfetti, le equazioni di queste tensioni composte sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \\ u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{5\pi}{6}) \end{aligned}$$

L'ampiezza (e il valore efficace) delle tensioni composte è $\sqrt{3}$ volte maggiore di quella delle tensioni semplici.

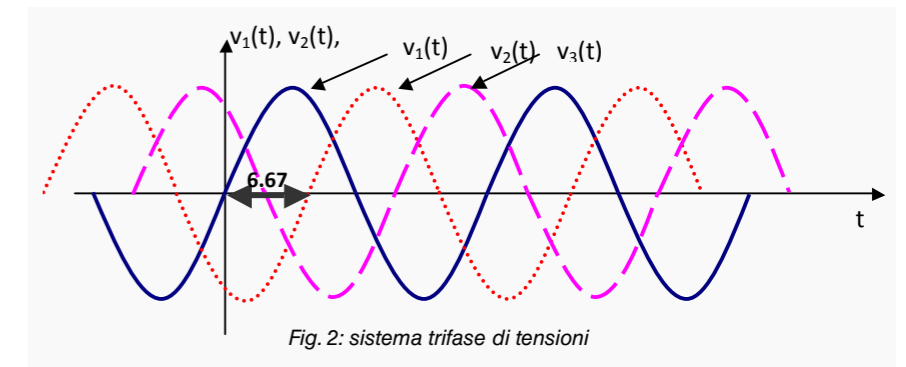
La somma delle 3 componenti di un sistema trifase simmetrico di tensioni è pari a 0.

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

B. Rappresentazione temporale

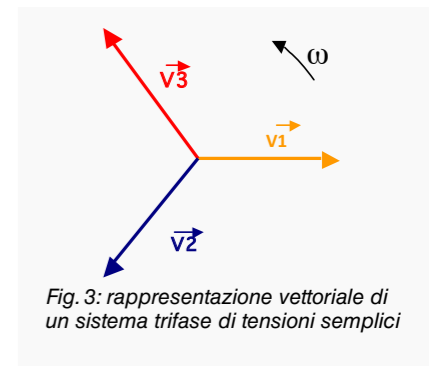
Un sistema trifase di tensioni di fase isofrequenziali a 50 Hz (fig. 2) si compone di 3 sinusoidi di tensione che si succedono con uno sfasamento di 6,67 ms. Infatti,

$$\begin{aligned} \omega t_0 &= \frac{2\pi}{3} \\ t_0 &= \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{3 \cdot 314} = 6,67ms \end{aligned}$$



C. Rappresentazione vettoriale

Il sistema trifase di tensioni di fase descritto in precedenza può essere rappresentato su un piano vettoriale (fig. 3). La lunghezza dei vettori corrisponde all'ampiezza delle sinusoidi che compongono il sistema. In elettrotecnica, ciò che più interessa l'utente sono i valori efficaci, e la **rappresentazione vettoriale** del sistema molto spesso è realizzata a partire dai valori efficaci delle funzioni sinusoidali.



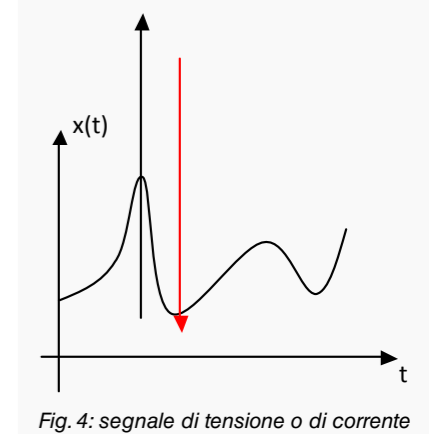
2. Rappresentazione temporale dei segnali

Per la rappresentazione dei segnali elettrici si utilizza un **oscillogramma**. Un segnale è la variazione di una grandezza elettrica analogica (tensione o corrente) in funzione del tempo. Questi segnali variano in modo continuo nel tempo secondo una legge matematica.

Un segnale di tensione o di corrente (fig. 4) che varia in funzione del tempo può essere caratterizzato da una relazione matematica del tipo:

$$t \rightarrow x(t)$$

dove $x(t)$ rappresenta il valore del segnale per ogni valore del tempo t che passa. Per consuetudine questo fattore è chiamato **valore istantaneo**.



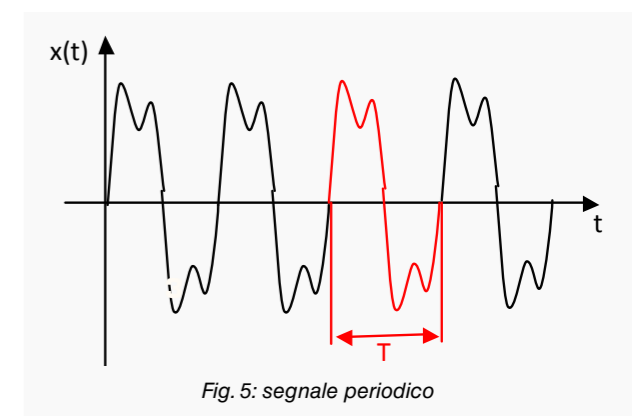
Proprietà particolari

Segnale periodico

Un segnale $x(t)$ è **periodico** quando si verifica la relazione seguente:

$$x(t + T) = x(t)$$

Il segnale si riproduce identico a se stesso nel corso del tempo. L'intervallo di tempo che separa due istanti in cui il segnale riprende esattamente le stesse caratteristiche si chiama **periodo T** (fig. 5).



Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

Serie di FOURIER

Quando il segnale è periodico ma non sinusoidale e se si verificano alcune condizioni (in genere verificate per i segnali trattati abitualmente in elettrotecnica), è possibile ottenere, con una trasformazione **in serie di FOURIER**, una rappresentazione temporale composta esclusivamente dalla somma di un segnale continuo e di segnali sinusoidali la cui frequenza è un multiplo della frequenza del segnale di base.

Questa proprietà è particolarmente interessante per ragioni di calcolo (calcolo con numeri complessi) e di rappresentazione (**rappresentazione spettrale**).

Tale trasformazione si esegue nel modo seguente:

Si dia $x(t)$, un segnale periodico con periodo T .

La scomposizione in serie di FOURIER di $x(t)$ è data dalla formula seguente:

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) dt \\ B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) dt \end{cases}$$

X_0 è chiamato componente continua del segnale $x(t)$;

A_n e B_n sono coefficienti che rappresentano l'ampiezza delle armoniche di grado n del segnale $x(t)$.

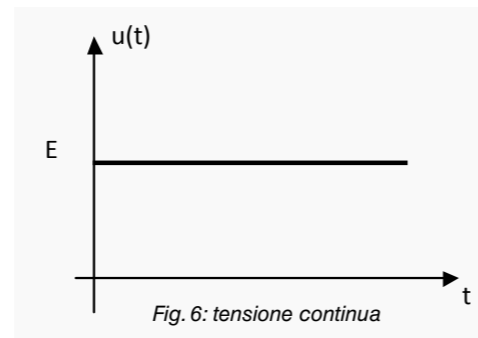
Esempi

Tensione continua

$$u(t) = E$$

La tensione $u(t)$ (fig. 6) non varia nel corso del tempo.

Non è periodica, quindi non è scomponibile secondo la serie di FOURIER.



Corrente alternata sinusoidale (fig. 7)

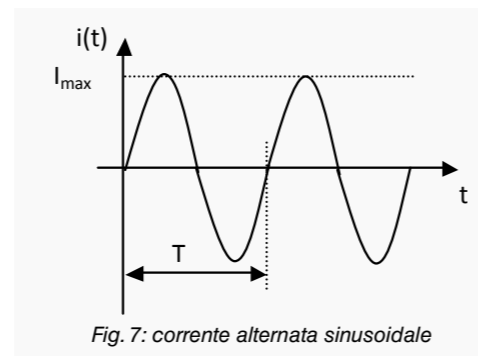
$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

Questo segnale è periodico con periodo T perché:

$$\begin{cases} i(t) = I_{\max} \sin \omega t \\ i(t+T) = I_{\max} \sin[\omega(t+T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t \end{cases}$$

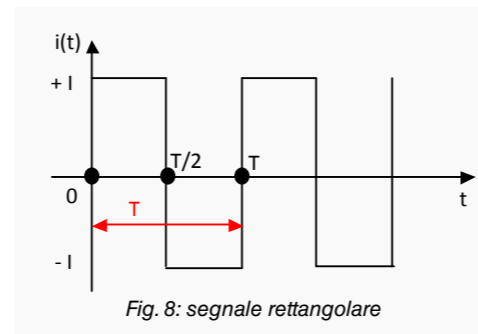
$i(t+T) = i(t)$ questo segnale è quindi periodico con periodo T .

Il calcolo della serie di FOURIER di questo segnale non è utile poiché $i(t)$ è sinusoidale puro.



Corrente a segnali rettangolari (fig. 8)

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ su un emiperiodo} \\ i(t) = -I \text{ su un emiperiodo} \end{cases}$$



Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

Calcolo della serie di FOURIER

Calcolo di I_0

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} I dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{\frac{T}{2}} - t_{\frac{T}{2}}^T] \\ I_0 &= \frac{I}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Il risultato di questo calcolo era prevedibile, tenuto conto della simmetria in relazione all'asse del tempo del segnale $i(t)$.

Calcolo degli A_n

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} I \cdot \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T I \cdot \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right] \\ A_n &= \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[\sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right] \\ A_n &= \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)] \\ A_n &= 0 \end{aligned}$$

Calcolo dei B_n

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} I \cdot \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T I \cdot \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right] \\ B_n &= \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[-\cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right] \\ B_n &= \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)] \\ B_n &= \frac{I}{\pi \cdot n} [-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n] \\ B_n &= \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Per n pari, B_n è uguale a 0. Per n dispari, B_n si scrive: $B_n = \frac{4 \cdot I}{n\pi}$

La scomposizione del segnale $i(t)$ in serie di FOURIER si scrive quindi:

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ dispari})$$

Nota importante::

Per eseguire il calcolo degli A_n e dei B_n , può essere utile scegliere l'origine dei tempi in modo da creare una simmetria nella descrizione matematica del segnale. Questa operazione può consentire una notevole semplificazione dei calcoli.

Rappresentazione temporale

Con la serie calcolata in precedenza, è possibile ricostruire il segnale originale con maggiore o minore precisione.

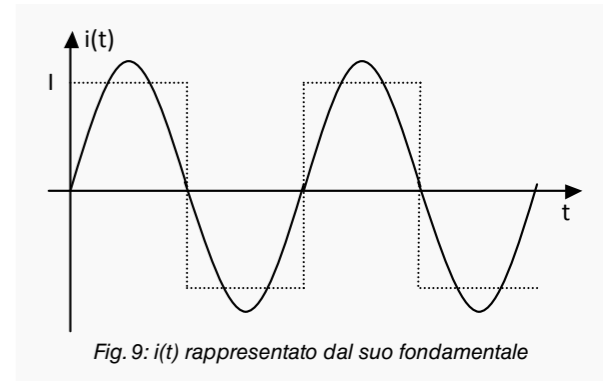
• Solo con il primo termine (fig. 9): $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$

Questo primo termine è anche detto "fondamentale".

• Con i primi due termini: $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$

• Con i primi tre termini: $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$

Più termini della serie si aggiungono, più il segnale ricomposto si avvicinerà al segnale originale.



3. Rappresentazione vettoriale dei segnali

Con la rappresentazione di Fresnel utilizzato è possibile sfruttare le operazioni vettoriali, più agevoli delle operazioni sulle funzioni seno e coseno. La rappresentazione vettoriale di corrente-tensione in regime sinusoidale è un modo per conservare solo uno sfasamento e un'ampiezza del segnale. È anche possibile ottenere questo risultato attraverso l'uso dei numeri complessi.

A. Corrispondenza temporale-vettoriale

La rappresentazione vettoriale è possibile esclusivamente per i segnali sinusoidali. Si consideri il segnale sinusoidale $x(t)$ dato dalla relazione seguente:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

X è l'ampiezza del segnale sinusoidale $x(t)$
 ω è la pulsazione del segnale sinusoidale $x(t)$
 φ è la fase rispetto all'origine del segnale sinusoidale $x(t)$

Questa rappresentazione si basa sulla corrispondenza, tra un vettore di ampiezza X in rotazione alla velocità ω intorno a un punto di origine O , di questo stesso segnale su un asse dei tempi (fig. 10).

φ è la fase all'origine (per $t = 0$).
 L'angolo percorso dal vettore \vec{X} relativamente all'asse di origine Ox è uguale a $(\omega t + \varphi)$.
 Il periodo T è dato dalla relazione seguente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

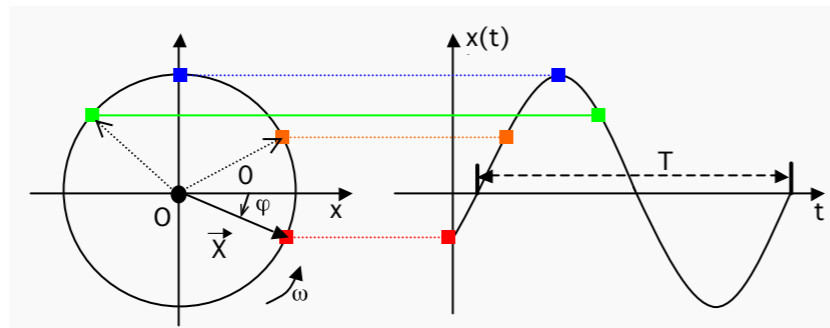


Fig. 10: corrispondenza tra il vettore X e il segnale $x(t)$

B. Rappresentazione di FRESNEL

Quando ci si accinge a studiare dei segnali sinusoidali (corrente e tensione) relativi a uno stesso circuito, è consuetudine utilizzare una rappresentazione vettoriale detta rappresentazione di FRESNEL. Le grandezze sinusoidali presentano la stessa pulsazione, solo le ampiezze e le fasi iniziali sono diverse. Una rappresentazione dei vettori per un istante dato è quindi sufficiente per trattare i problemi (fig. 11).

Si prende, in generale, come riferimento l'origine dei tempi ($t = 0$).

Esempio 1: circuito con reattanza

$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$ in regime permanente la corrente $i(t)$ è uguale a:

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{con} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

In una rappresentazione di FRESNEL (fig. 12), la tensione e la corrente sono rappresentate dai vettori \vec{U} e \vec{I} :

Si noti che l'angolo φ è sempre, per convenzione, orientato dalla corrente verso la tensione.

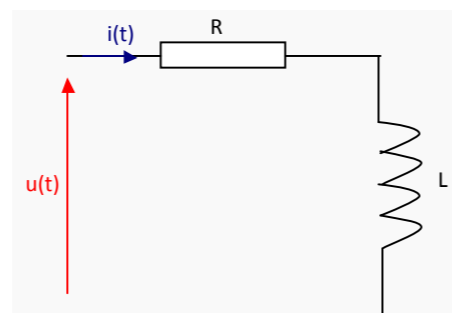


Fig. 11: circuito (R, L)

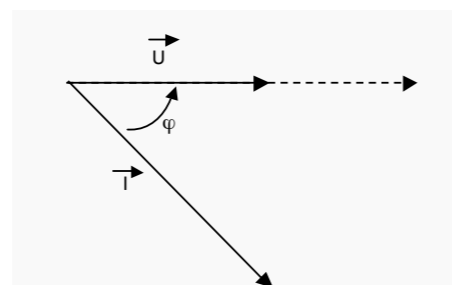


Fig. 12: Rappresentazione vettoriale

Esempio 2: sistema trifase di tensioni

Dato il sistema trifase di tensioni rappresentato dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_{\max} \sin \omega t \\ v_2(t) &= V_{\max} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ v_3(t) &= V_{\max} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

In fig. 3, la rappresentazione vettoriale (di FRESNEL) di questo stesso sistema trifase.

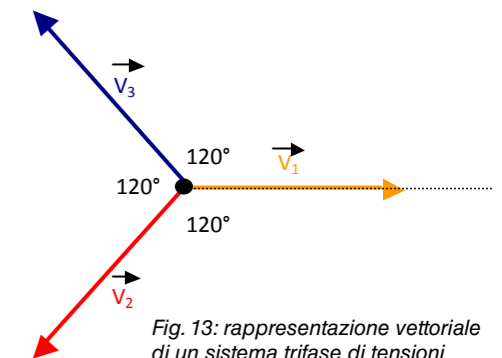


Fig. 13: rappresentazione vettoriale di un sistema trifase di tensioni

4. Rappresentazione spettrale dei segnali

Un segnale periodico non sinusoidale è più complesso; può contenere una moltitudine di frequenze. Il suo spettro fornisce quindi informazioni sulle diverse componenti frequenziali che contiene. Lo spettro di un segnale è la rappresentazione in funzione delle frequenze delle diverse componenti presenti nel segnale.

Quando un segnale $x(t)$ è periodico ma non sinusoidale e caratterizzato da determinate proprietà matematiche (in genere verificate per i segnali trattati abitualmente in elettrotecnica), è possibile ottenere, attraverso una trasformazione in serie di FOURIER, una rappresentazione temporale composta esclusivamente da un segnale continuo e da segnali sinusoidali le cui frequenze sono multipli della frequenza del segnale di base.

Questa proprietà è molto interessante per rappresentare il segnale facendo emergere la frequenza e l'ampiezza delle diverse componenti sinusoidali date dal calcolo della scomposizione in serie di FOURIER.

Nel caso di un segnale sinusoidale puro (fig. 14) descritto dall'espressione seguente:

$$x(t) = X \sin \omega t$$

vediamo apparire un'ampiezza X per un segnale sinusoidale di pulsazione ω (o di frequenza f).

Queste due informazioni, molto importanti sul piano dell'analisi della rete, possono essere riportate su un grafico nel quale figurano sulle ordinate l'ampiezza della sinusoide, mentre la frequenza è indicata sull'asse delle ascisse. Questa è la rappresentazione spettrale del segnale $x(t)$ (fig. 15).

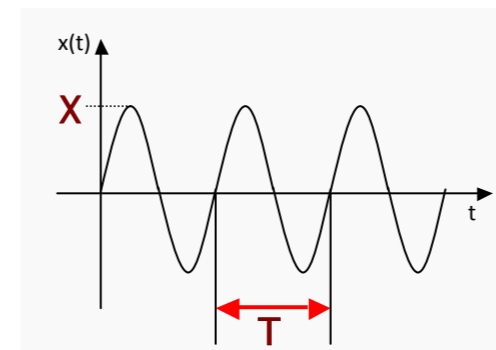


Fig. 14: segnale sinusoidale

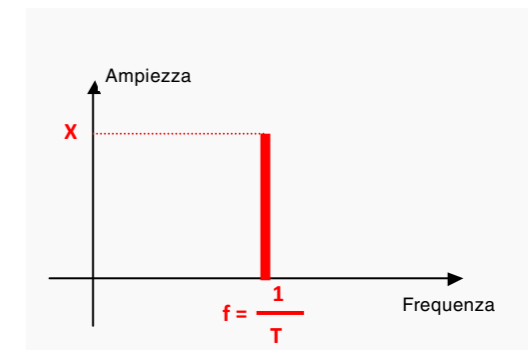


Fig. 15: spettro del segnale $x(t)$

Rappresentazioni del segnale elettrico trifase

Esempio: segnale rettangolare

Una corrente $i(t)$ è descritta dalla funzione matematica seguente:

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ su un'emiperiodo} \\ i(t) = -I \text{ su un'emiperiodo} \end{cases}$$

La figura 16 fornisce una rappresentazione temporale di $i(t)$.

Il calcolo della serie di FOURIER di questo segnale $i(t)$ fornisce la seguente:

$$i(t) = \frac{4.I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4.I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4.I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4.I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ dispari})$$

Questo segnale non presenta componenti continue, ma è composto da:

- un segnale sinusoidale di frequenza f (quella del segnale di base) di ampiezza $\frac{4.I}{\pi}$
- un segnale sinusoidale di frequenza $3f$ di ampiezza $\frac{4.I}{3\pi}$
- un segnale sinusoidale di frequenza $5f$ di ampiezza $\frac{4.I}{5\pi}$
- ...

Questa descrizione consente di stabilire la rappresentazione spettrale (o armonica) seguente (fig. 17):

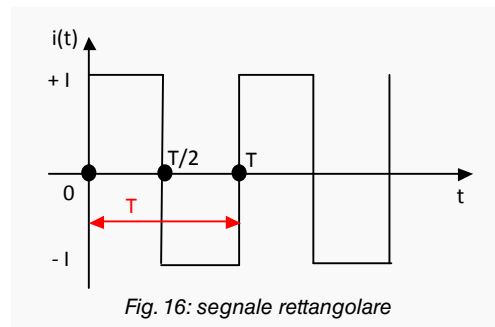


Fig. 16: segnale rettangolare

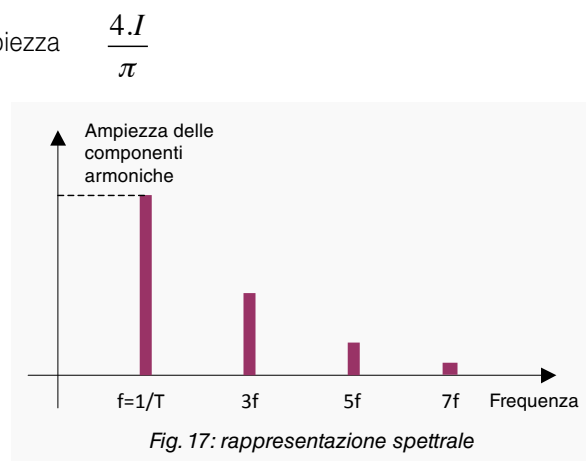
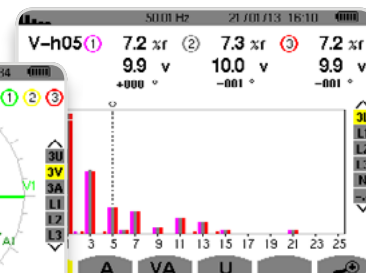
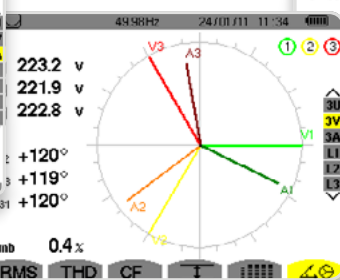
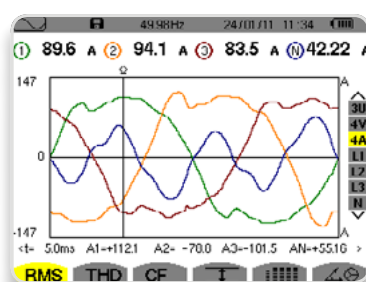


Fig. 17: rappresentazione spettrale



Gli analizzatori di potenza e della qualità dell'energia della **linea Qualistar+** consentono la visualizzazione di tutte le rappresentazioni descritte.